המחלקה להנדסת אלקטרוניקה, מחשבים והנדסה רפואית

בית הספר להנדסה - רופין

### מעבדה מס. 4 - התמרה פורייה דיסקרטית של אות בדיד - DFT

מגיש: ארז יעקב איינס.

תאריך הגשה: 04/05/18

### מעבדה מס. 4 - התמרה פורייה דיסקרטית של אות בדיד - DFT

# מטרות

1. התנסות עם התמרות תדר של אותות דיסקרטיים - DFT, FFT.
2. הצגת תכונות של התמרות תדר מסוג DFT .

# ניסויים

**1 - חישוב התמרת פוריה הבדידה וההתמרה ההופכית**

#### שאלות

1. השתמש בפקודה fft לחישוב של X[k] (התמרת פוריה הבדידה, DFT) של הסדרה x=[1 1 1 1 0 0 0 0] . מהו אורך הווקטור שהתקבל?
   * התקבלה סדרה באורך N=8.
2. חשב את ההתמרה ההפוכה של X[k] שהתקבל בסעיף קודם באמצעות פקודת ifft. האם קיבלת את הסדרה המקורית? השווה בין הסדרות ע"י חיסור ביניהן.
   * התקבלה אותה הסדרה עד כדי שגיאות קירוב מכפלים קומפלקסיים שקטנות ב-16 סדרי גודל מהעוצמה בזמן.
3. עבור הסידרה שהוגדרה בסעיף קודם – x=[1 1 1 1 0 0 0 0] - חשב את התמרת ה- DFT ואת ההתמרה ההפוכה כאשר אורך ההתמרה: 4,6,10, 16 . השתמש בפונקציות fft ו ifft לביצוע הפעולות. (שים לב שיש אפשרות להשתמש בפרמטרים של הפונקציות). הסבר את התוצאות.
   * אם נתמיר אות שכולו באותו הערך, הדבר שקול לאות DC בעוצמה של ערך הדגימה, לכן עבור ההתמרה באורך 4 נקבל שה-DFT בעוצמה של 4 בתדר 0 ובעוצמה 0 בשאר הדגימות.  
     הדבר שקול לדגימה של גרעין דיריכלה שעבר קונבולוציה עם התמרתו של קוסינוס בתדר 0, ומכיוון שההתמרה באורך של כפולה שלמה של מחזור האות (1,2,3 או 4 כי זה DC) ולכן דוגמים את הגרעין במקסימום שלו ובכל נקודות האפס.
   * עבור שאר האותות, ניתן להסתכל עליהם כריפוד באפסים של ההתמרה המקורית ולכן הגדלת הרזולוציה בדגימת ה-DTFT, או כהתמרה של אות שכעת אינו DC קבוע ולכן מכיל תדרים שאינם 0. בכל מקרה, לא התווסף מידע להתמרת ה-DFT שכן אנו פשוט דוגמים ברזולוציה גבוהה יותר את התמרת ה-DTFT של החלון הבדיד.



**2 - הזזה וקונבולוציה מעגלית ב- DFT**

פעולות ההזזה בזמן והקונוולוציה של שתי סדרות ניתנות לביצוע במרחב התדר ע"י DTFT. התמרת ה DFT פועלת בצורה שונה - ההזזה היא מעגלית. פעולת הקונוולוציה היא מעגלית גם כן.

שתי הפונקציות, circonv.m ו- circshift.m, מאפשרות הדגמה של פעולות אלו.

הפונקציה, circ\_property\_DFT.m, משתמשת בפונקציות הנ"ל בכדי לחקור את נושא הקונבולוציה המעגלית.

#### שאלות

1. הסבר במפורש (יש להסביר כל שורה ואת פעולת הפונקציה) את הפונקציות המסומנות לעיל.
   * circshift:

function y = circshift(x,M)  
% Develops a sequence y obtained by  
% circularly shifting a finite-length  
% sequence x by M samples  
if abs(M) > length(x) % shift amount greater ther vector length  
 M = rem(M,length(x));% only shift by remainder of M by length  
end  
if M < 0 % vector indexes cannot be negative  
 M = M + length(x); % negative shifts are cycled to positive shifts  
end  
y = [x(M+1:length(x)) x(1:M)]; % rearrange vector x by displacing shifted  
% elements to the beginning and follow with rest of elements

* + circonv:

function y = circonv(x1,x2)  
% Develops a sequence y obtained by  
% circularly convolving two finite-length  
% sequences x1 and x2.  
% x1,x2 must have identical lengths.  
L1 = length(x1); L2 = length(x2);  
if L1 ~= L2 % vectors must be of equal lenghts to circularly convolve.  
 error('Sequences of unequal lengths') % throws exception and returns.  
end  
y = zeros(1,L1); % output initializer.  
x2tr = [x2(1) x2(L2:-1:2)]; % flip x2 cyclicly.  
for k = 1:L1 % repeat L1 times  
 sh = circshift(x2tr,1-k); % sh = cyclic shift by 1-k times.  
 h = x1.\*sh;% element-wise multiply flipped and shifted signal x2 by x1.  
 y(k) = sum(h);% assign the convolution value at k as sum of element-wise  
 % multiplication.  
end

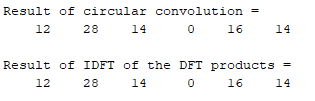
* + circ\_property\_DFT:

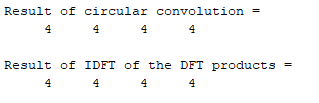
function circ\_property\_DFT(g1,g2)  
% investigates the Circular Convolution Property of DFT  
% by comparing the circular convolution computed directly of two dicrete  
% signals g1 and g2, to the inverse transform of their frequency domain  
% element-wise multiplication.  
ycir = circonv(g1,g2);% calculate the circular convolution of discrete signals  
% g1 and g2.  
disp('Result of circular convolution = ');disp(ycir)% Echos info string  
% and result of circular convolution.  
G1 = fft(g1); G2 = fft(g2);% calculate DFTs of g1 and g2.  
yc = real(ifft(G1.\*G2));% compute real part of the inverse DFT of element-  
% wise multiplication of DFTs (assumes g1[n] and g2[n] are real signals.  
disp('Result of IDFT of the DFT products = ');% Echos string to user  
disp(yc)% Echos calculated inverse of DFT multiplication of g1 and g2.

1. הרץ את הפונקציה circ\_property\_DFT.m עבור הסדרות:

g1 = [1 2 3 4 5 6]; g2 = [1 -2 3 3 -2 1];

ובדוק את התוצאות. האם התוצאה של ההתמרה ההפוכה של מכפלת ההתמרות אמנם שווה לתוצאה שמתקבלת בעזרת קונוולוציה מעגלית?

* + תוצאת ההרצה:  
    
  + תוצאת ההתמרה ההפוכה של מכפלת ההתמרות אכן שווה לתוצאה של החישוב הישיר כצפוי.

1. הרץ את הפונקציה כעת עבור שתי הסדרות הבאות: [1 1 1 1], [1 1 1 1] וודא שהמסקנות שקיבלת בסעיף הקודם אכן נכונות.
   * ההמשכה המחזורית של האותות הוא DC בגובה 1 ולכן תוצאת הקונבולוציה הצפויה היא הערך 4 בכל הדגימות של הקונבולוציה המעגלית.  
     תוצאת ההרצה:  
     

**3 - קונוולוציה לינארית בעזרת קונוולוציה מעגלית**

הפונקציה, linear\_via\_circ\_conv.m, משתמשת בפונקציות הנ"ל בכדי לחקור את נושא ביצוע קונבולוציה בעזרת הקונבולוציה המעגלית.

#### שאלות

1. הסבר במפורש (יש להסביר כל שורה ואת פעולת הפונקציה) את הפונקציה המסומנת לעיל.

function [ylin,yDFT] = circ\_via\_linear\_conv(g1,g2)  
% Computes the Linear Convolution of signals g1[n] and g2[n]  
% directly and by circular convolution, both in  
% time and by inverse of DFT multiplication (time circular convolution)  
L1 = length(g1); L2 = length(g2);% claculate series lengths.  
g1p = [g1 zeros(1,length(g2)-1)];% 0 padd to L1+L2-1; length of the linear convolution  
g2p = [g2 zeros(1,length(g1)-1)];% 0 padd to L1+L2-1; length of the linear convolution  
ylin = circonv(g1p,g2p);% compute the linear convolution using circular convolution.  
disp('Linear convolution via circular convolution = ');disp(ylin);% Echo circ conv results.  
subplot(3,1,1), stem(ylin);% plot first part convolved series.  
y = conv(g1, g2);% compute direct linear convolution.  
disp('Direct linear convolution = ');disp(y)% Echo linear conv results.  
subplot(3,1,2), stem(y);% plot 2nd part convolved series.  
  
%using DFT  
G1p = fft(g1p); G2p = fft(g2p);% compute DFTs of padded series.  
yDFT = real(ifft(G1p.\*G2p));% compute real part of inverse of element-wise multiplication  
% assumes g1[n] and g2[n] are real.  
subplot(3,1,3), stem(yDFT);% plot results of inverse DFT

1. הרץ את הפונקציה לעיל עבור הסדרות:

g1 = [1 2 3 4 5 6]; g2 = [10 11 12 13 14 15];

הוסף כותרות לגרפים השונים. וודא שניתן לקבל קונוולוציה לינארית בעזרת קונוולוציה מעגלית.



* תוצאת הקונבולוציה אכן זהה בשלושת השיטות.

1. השווה את התוצאה שהתקבלה בעזרת שימוש בקונבולוציה המעגלית לתוצאה שהתקבלה בעזרת שימוש ב- DFT. הסבר את השוני אם קיים. באם הערכים דומים – ניתן לבצע את ההשוואה ע"י מציאת ההפרש בין שתי הסדרות ושרטוטו באמצעות פונקצית stem.
   * ערכי הסדרות בשתי השיטות שווים אחד לשני עד כדי שגיאות קירוב כפל קומפלקסי בכ-14 סדרי גודל.



1. אם אורך של g1 הוא L1 והאורך של g2 הוא L2 , שנה את הפונקציה כך שהריפוד באפסים יהיה לאורך כולל L1+L2-2 . השווה את ערך הסידרה שהתקבלה לסידרה שהתקבלה בסעיף קודם. באילו איברים יש שוני?
   * השוני מופיע באיבר הראשון של הקונבולוציה. מכיוון "שחסר" איבר בסוף הסדרה, ה-shift הראשון של הקונבולוציה מרגיש את הקיפול של האיבר האחרון בסדרה. לכן ערך האיבר הראשון באינדקס 0 של הקונבולוציה המעגלית הוא סכום הערך "האמיתי" והאיבר העשירי "האמיתי".



1. חזור על סעיף קודם אבל הפעם הריפוד באפסים יהיה לאורך כולל L1+L2-3. באילו איברים יש שוני? האם ניתן להכליל את המסקנה למקרה הכללי בו הריפוד באפסים אינו מספיק?
   * האיבר הראשון הוא כעת סכום של האיבר הראשון והאיבר הראשון לאחר הזזה מעגלית של הקונבולוציה הלינארית ב-2. והאיבר השני הוא סכום של האיבר השני והאיבר השני לאחר הזזה מעגלית ב-2.
   * ככלל, תוצאת הקונבולוציה לאחר ריפוד באפסים תהיה סכום הקונבולוציה הלינארית באורך ההרחבה עם היפוך והזזה של הקונבולוציה הלינארית מרופדת באפסים בסופה.

**4 - התמרת DFT של סדרת קוסינוס**

נתון האות הבא: x[n]= cos(2π \* 0.125n) .

#### שאלות

1. מהו המחזור הבסיסי של הסדרה? נקרא למחזור הבסיסי של הסדרה L.
   * 
2. עבור כל התמרת DFT של האות באורכים : 2L, 3L, 3.25L, 3.5L, 3.75L, 4L:

2.1. הגדר את המרווח התדר - ∆ θ .

* 

2.2. עבור אילו ערכים של k התקבל ערך מקסימום מקומי בכל התמרה?

* 

1. עבור האורכים לעיל שרטט את הסדרות השונות ואת ספקטרום העוצמה של ההתמרות המתאימות.
   * השרטוט:
2. (רשות) השתמש בערכי ההתמרה שהתקבלה עבור סדרה באורך 4L כדי לשרטט את ה CTFT של האות המקורי (הנח שתדר הדגימה היה 100Hz). עשה זאת ע"י סידור מחדש של ערכי סדרת ההתמרה, סמן את התדרים המתאימים על ציר ω ואת הערכים המתאימים של ההתמרה.



* תדר הקוסינוס שנדגם הוא 12.5 הרץ בהנחה שלא התרחשה התחזות.
* לא כל כך הבנתי איך להתחשב באמפליטודה והאם להגביר ב- כי ההתמרה הרציפה מכילה את הדיסטריבוציה  וזו אינה ניתנת לשרטוט בערך סופי, אלא אם ניקח את גודל החלון  , וגם אז לא ניתן באמת לשרטט אותה.